

文章编号 1004-924X(2008)10-1874-06

# 六杆并联机构运动学正解研究及其在同步辐射光束线中的应用

卢启鹏<sup>1</sup>, 李勇军<sup>1,2</sup>, 彭忠琦<sup>1</sup>, 凌丽青<sup>1,2</sup>

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;

2. 中国科学院 研究生院, 北京 100039)

**摘要:**从相关物理模型出发,以同步辐射光束线六杆并联机构的运动学反解为基础,采用信赖域法优化了非线性超越方程组,编制了相应的 MATLAB 程序,得到了机构的运动学正解。实例应用结果表明,信赖域法是解决运动学正解问题的有效途径,求解程序稳定可靠,运算速度快,误差小,线性精度达  $10^{-12}$  mm,转动精度达  $10^{-15}^\circ$ 。采用差动螺旋的微动调节方式,即可使单色器箱体姿态的线性调节分辨达  $5\ \mu\text{m}$ ,转角分辨达  $3''$ ,完全满足实际工作的要求。

**关键词:**同步辐射;单色器;六杆并联机构;运动学正解;信赖域法

**中图分类号:**O432.1;TH113.2 **文献标识码:**A

## Forward kinematics of six-bar parallel mechanism and its applications in synchrotron radiation beam-line

LU Qi-peng<sup>1</sup>, LI Yong-jun<sup>1,2</sup>, PENG Zhong-qi<sup>1</sup>, LING Li-qing<sup>1,2</sup>(1. *Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;*2. *Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China*)

**Abstract:** Six-bar parallel mechanism is widely used in synchrotron radiation beam-line. Based on the inverse kinematics, the forward kinematics of six-bar parallel mechanism in synchrotron radiation beam-line was obtained by trust region method for nonlinear optimization, and the corresponding program of MATLAB language was also designed. The application results show that the trust region method is an effective way to study forward kinematics, and proposed program allows stable, reliable and fast operation and gives small errors in linear precision of  $10^{-12}$  mm and rotational precision of  $10^{-15}^\circ$ . Using differential snail adjustment, the attitude of monochromator box can achieve a linear resolution of  $5\ \mu\text{m}$  and a rotational resolution of  $3''$ , which entirely satisfies the practical requirements.

**Key words:** synchrotron radiation; monochromator; six-bar parallel mechanism; forward kinematics; trust region method

收稿日期:2008-04-21;修订日期:2008-07-04.

基金项目:国家重大科学工程:上海光源工程资助项目(No. SS-06, O7093XQ070)

# 1 引言

并联机构具有高刚度、高精度、高承载能力和结构简单紧凑等一系列优点,在机构领域中占有十分重要的地位,目前其应用几乎涉及现代尖端技术的各个领域<sup>[1-4]</sup>。光束线是同步辐射装置的重要组成部分,通常由单色器和前、后置镜组成,而三者的核心部件即光学元件的稳定与调节都是由精密调节平台来完成的,现在国际上越来越多地采用六杆并联机构来实现<sup>[5-8]</sup>。

近年来,并联机构的分析研究已成为国际机构学界的研究热点<sup>[9]</sup>。在并联机构的运动分析中,给定所需的动平台位置和姿态(简称位姿),求解支杆长度的过程称为运动学反解;反之,给定支杆长度求动平台位姿称为运动学正解<sup>[10]</sup>。由于结构的原因,求解并联机构的反解相对容易,求解正解却十分复杂,甚至成了一个世界性的难题<sup>[9]</sup>。运动学正解是并联机构应用的基础<sup>[4]</sup>,通常有封闭解法和数值解法,两种方法各有优缺点。封闭解法即解析解法,可以求得方程的全部解,但难度大,通用性差;数值解法虽对迭代初值有一定的依赖性,但数学建模简单,能迅速方便地对任何机型结构求得实解,因而应用比较方便<sup>[10]</sup>。

本文针对上海光源(Shanghai Synchrotron Radiation Facility, SSRF)软 X 射线谱学显微光束线单色器中应用的特殊六杆并联机构,建立了机构的物理模型和数学模型,然后求解机构的运动学反解。在此基础上,采用非线性规划算法-信赖域法,求解机构的运动学正解。最后利用 MATLAB 进行仿真计算。结果表明,采用信赖域法求解运动学正解快速准确,误差小,对实际工作有重要的指导意义。

## 2 六杆并联机构运动学正解

通常的六杆并联机构是由 6 根可伸缩的驱动支杆(简称支杆)通过两端的球形铰链将定平台和动平台连接而成的,具有 6 个自由度<sup>[11]</sup>。

在同步辐射光束线工程的实际应用中,大多采用如图 1 所示的六杆并联机构,它的支杆分为 3 根竖直支杆和 3 根水平支杆,支杆长度以差动螺旋方式进行微动调节,操作简单、节省空间,上、

下铰点位置都不在一个平面上。

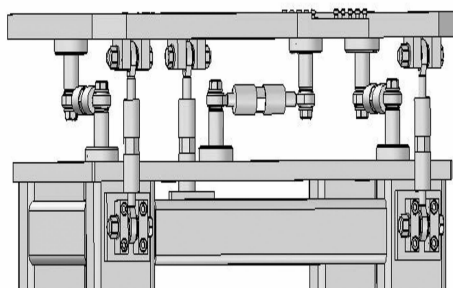


图 1 六杆并联机构物理模型

Fig. 1 Physic model of six-bar parallel mechanism

### 2.1 建立坐标系

从图 1 的六杆并联机构物理模型出发,建立机构的坐标系,包括定平台坐标系  $O-xyz$  和动平台坐标系  $O'-x'y'z'$ ,如图 2 所示。两坐标原点  $O, O'$  均设置在平台的形心处(根据实际情况,  $O'$  置于动平台正上方  $h$  处),初始位置 3 个坐标轴相互平行,则可知下、上铰点分别在  $O-xyz$  和  $O'-x'y'z'$  中的坐标值,分别用  $\mathbf{A}_i = (A_{ix}, A_{iy}, A_{iz})^T$  和  $\mathbf{B}_i' = (B_{ix}', B_{iy}', B_{iz}') (i=1, 2, \dots, 6)$  表示。

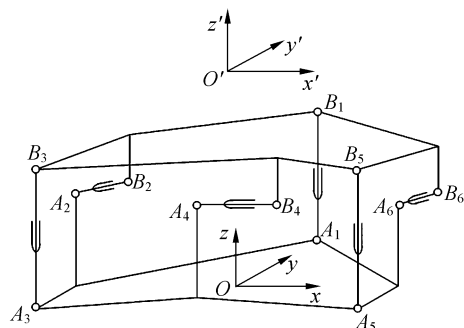


图 2 六杆并联机构运动简图

Fig. 2 Kinematic diagram of six-bar parallel mechanism

### 2.2 运动学反解

设  $\alpha, \beta, \gamma$  分别为动平台的 RPY(Roll-Pitch-Yaw)角,  $\mathbf{P} = (X_P, Y_P, Z_P)^T$  为动平台原点  $O'$  在  $O-xyz$  中的坐标值,则支杆上铰点在  $O-xyz$  中的坐标值为:

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_i' + \mathbf{P}, \tag{1}$$

式中,  $\mathbf{R}$  为  $O'-x'y'z'$  到  $O-xyz$  的姿态矩阵<sup>[10,12]</sup>。

$$\mathbf{R} = \text{Yaw}(z, \gamma) \cdot \text{Pitch}(y, \beta) \cdot \text{Roll}(x, \alpha) =$$

$$\begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}$$

式中,  $c$  代表  $\cos$ ,  $s$  代表  $\sin$ 。

给定动平台位姿, 即已知  $(\alpha, \beta, \gamma, X_P, Y_P, Z_P)$  时, 六根支杆的长度为:

$$l_i = \sqrt{(B_{ix} - A_{ix})^2 + (B_{iy} - A_{iy})^2 + (B_{iz} - A_{iz})^2} \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (2)$$

式(2)即为并联机构的运动学反解方程。

### 2.3 运动学正解

六杆并联机构运动学正解是已知 6 根支杆的长度  $l_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), 求解动平台位姿  $\alpha, \beta, \gamma, X_P, Y_P, Z_P$ 。由式(2), 可得动平台位姿与支杆长度的约束方程组:

$$f_i(\alpha, \beta, \gamma, X_P, Y_P, Z_P, l_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (3)$$

式(3)是一个含三角函数的六元非线性超越方程组。

运动学正解的实质就是对该六元非线性超越方程组的求解。自 1965 年并联机构诞生起, 许多机构学者不断引入各种解析法, 也得到了多种类型的并联机构的封闭解, 但到目前为止, 数学上尚无完备的方法求其解析解<sup>[4]</sup>。而数值解法是一种比较有效的方法, 它应用方便, 能迅速地解决任何并联机构的正解问题<sup>[10]</sup>。

信赖域法和线搜索法是非线性规划的两类主要数值方法。其中, 信赖域法是近 30 年才发展起来的一类非线性规划算法, 它思想新颖, 算法可靠, 突出优点就是其具有全局收敛性, 可以降低对初始点选取的要求。因而, 数学界对信赖域法的研究是近年来非线性规划领域的一个重要研究方向。

信赖域法的基本思想是在当前迭代点的邻域内求解一个相对简单的子问题, 得到一个信赖域半径, 通过判断价值函数实际下降量和预估下降量的吻合程度, 决定是否接受信赖域半径。无约束信赖域法的一般步骤如下<sup>[13]</sup>:

步骤 1: 给定常数  $\delta > 0, \eta \in (0, 0.25), \epsilon \geq 0$ , 初值  $x_0$ , 初始信赖域半径  $\delta_0 \in (0, 1)$ , 令  $k=0$ 。

步骤 2: 若  $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon$ , 则算法终止。 $\nabla f(x_k)$  是目标函数  $f(x)$  在当前迭代点  $x_k$  处的 Jacobian 矩阵。

步骤 3: 利用二次逼近构造信赖域子问题(4), 求解得  $d_k$ :

$$\min \varphi_k(x) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{B}_k \mathbf{d} + \nabla f(x_k)^T \mathbf{d} \quad \|\mathbf{d}\| \leq \delta_k, \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{B}_k$  是  $n \times n$  实对称矩阵。

步骤 4: 计算实际下降量和预估下降量的比值:

$$r_k = \frac{\Delta f_k}{\Delta \varphi_k} = \frac{f(x_k) - f(x_k + d_k)}{\varphi_k(0) - \varphi_k(d_k)}. \quad (5)$$

步骤 5: 若  $r_k < 0.25$ , 则修正  $\delta_{k+1} = 0.25\delta_k$ , 且置  $x_{k+1} = x_k, k = k+1$ , 转步骤 2;

若  $r_k > 0.75$ , 则修正  $\delta_{k+1} = \min(2\delta_k, \delta)$ , 且置  $x_{k+1} = x_k + d_k, k = k+1$ , 转步骤 2;

$0.25 \leq r_k \leq 0.75$  时, 若  $r_k \geq \eta$ , 则令  $x_{k+1} = x_k + d_k$ ; 否则令  $x_{k+1} = x_k$ 。置  $\delta_{k+1} = \delta_k, k = k+1$ , 转步骤 2。

注意上面算法中的系数 0.25、0.75 是经验值, 可以用  $(0, 1)$  中的常数替换。

值得提出的是, 数值解法的计算工作量较大, 恰好 MATLAB 这个强大的数学工具在数值计算方面非常成熟, 选用其优化工具箱中的信赖域法即可快速求解非线性方程组<sup>[14]</sup>, 所以可以将 MATLAB 应用于并联机构的运动学正解中。

## 3 应用实例

SSRF 是我国正在建造的第三代同步辐射光源, 变包含角平面光栅单色器系统是 SSRF 首批建造的软 X 射线谱学显微光束线站的核心。其中单色器箱体采用六杆并联机构进行调节, 表 1 为单色器箱体姿态调节机构的调整范围和分辨率要求。

表 1 箱体姿态调节机构的技术要求

Tab.1 Technical requirements of attitude adjustment of box

参量	调整范围	分辨率
$X_P$	$\pm 5$ mm	0.02 mm
$Y_P$	$\pm 5$ mm	0.02 mm
$Z_P$	$\pm 5$ mm	0.01 mm
$\alpha$	$\pm 1.0^\circ$	0.1°
$\beta$	$\pm 1.5^\circ$	5"
$\gamma$	$\pm 1.0^\circ$	5"

参照图 2 的结构形式, 其中单色器箱体姿态

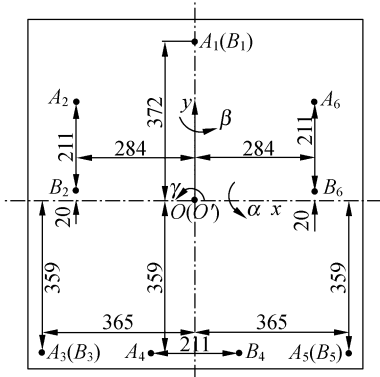


图 3 箱体姿态调节机构的铰点分布图

Fig. 3 Hinge distribution map of attitude adjustment for box

调节机构的铰点位置(单位:mm)如图 3 所示,各支杆的中位长度  $l$  均为 211 mm,  $h = 30$  mm, 且

$$A_{iz} = \begin{cases} 0; & (i=1, 3, 5) \\ 157.5 \text{ mm}; & (i=2, 4, 6) \end{cases},$$

$$B_{iz}' = \begin{cases} -30 \text{ mm}; & (i=1, 3, 5) \\ -83.5 \text{ mm}; & (i=2, 4, 6) \end{cases}.$$

如前所述,并联机构的运动学正解是建立在反解基础上的。根据表 1 箱体调节范围及精度要求,选用信赖域法,编制相应的 MATLAB 程序,其流程图如图 4 所示。图中,  $\Delta l_i = l_i - l$ , ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) 为支杆的伸缩长度( $l$  为支杆的中位长度)。

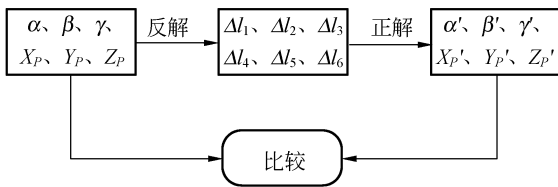


图 4 运动学正解仿真流程图

Fig. 4 Block diagram of forward kinematics

编制好程序后,即可自动选择最佳的信赖域半径,从而获得最高的收敛速度。从计算过程中看出,每次正解的迭代次数仅为 3~5 次,计算时间都在 1 s 以内,迭代结果可以在一次迭代后飞跃 10 个数量级,超速逼近最优解。因而使用方便,计算速度快,求解精度高。

假定动平台作螺旋转动,其中心轨迹  $t$  为:

$$\begin{cases} X_P = \sin t \\ Y_P = \cos t \\ Z_P = t \end{cases} \quad t=0 \sim 10 \text{ s}, \quad (4)$$

将轨迹方程代入程序,首先经反解得到 6 根支杆的伸缩量  $\Delta l$ ,如图 5 所示。然后以  $\Delta l$  为已知量,经正解反求动平台的中心轨迹,即正解轨迹  $t'$ ,与  $t$  比较如图 6 所示。同时,为了验证正解程序的精确性,做出了两轨迹在 3 个坐标轴方向上的误差曲线,如图 7~9 所示。

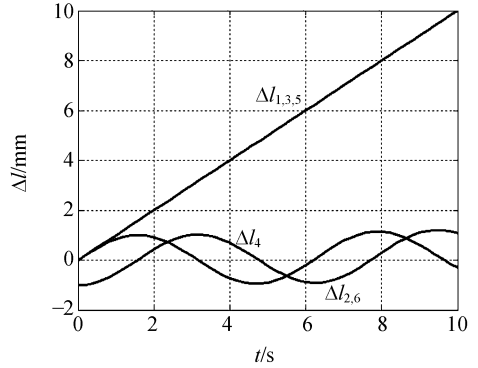


图 5 支杆伸缩量  $\Delta l$

Fig. 5 Variations of bar length  $\Delta l$

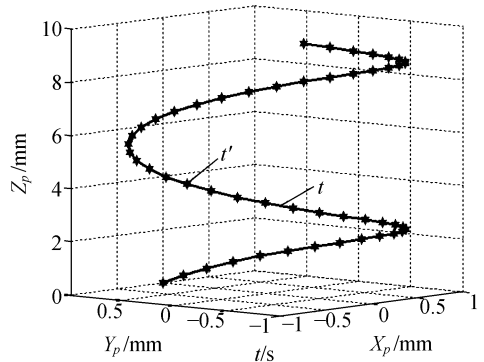


图 6 给定轨迹  $t$  与正解轨迹  $t'$

Fig. 6 Given curve  $t$  vs. solved curve  $t'$

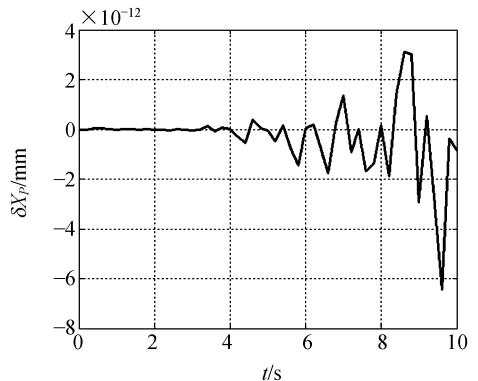
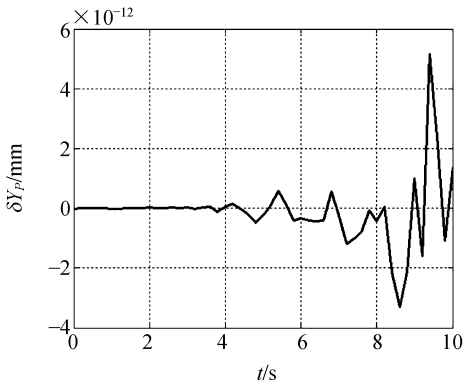
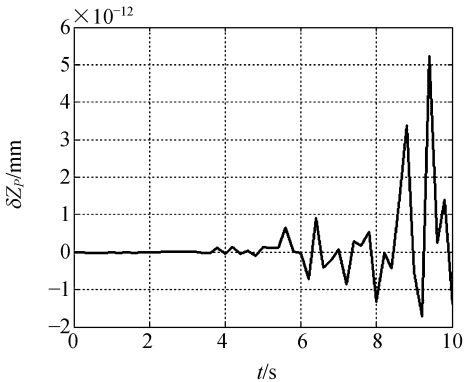


图 7 X 向  $t'$  相对  $t$  的偏差  $\delta X_P$

Fig. 7 X-deviation  $\delta X_P$  of  $t'$  vs.  $t$

图 8 Y 向  $t'$  相对  $t$  的偏差  $\delta Y_p$ Fig. 8 Y-deviation  $\delta Y_p$  of  $t'$  vs.  $t$ 图 9 Z 向  $t'$  相对  $t$  的偏差  $\delta Z_p$ Fig. 9 Z-deviation  $\delta Z_p$  of  $t'$  vs.  $t$ 

由图可知,采用信赖域法的正解轨迹与给定轨迹基本重合,误差极小。做螺旋转动时,X、Y、Z向的最大轴向误差分别为  $6.4 \times 10^{-12}$ 、 $5.2 \times 10^{-12}$ 、 $5.2 \times 10^{-12}$  mm,最大综合轴向误差也仅为  $7.8 \times 10^{-12}$  mm;而做摆动时, $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  的最大角度误差仅为  $4 \times 10^{-15}^\circ$ ,远远高于表 1 中的分辨率要求。

单色器的箱体姿态调整时,采用差动螺旋的微动调节方式,杆长分辨率可以达到  $5 \mu\text{m}$ 。取

表 2 箱体姿态调节的最大误差

Tab. 2 Maximum errors of attitude adjustment for box

参量	最大误差	分辨率要求
$\delta X_p$	$4.9 \mu\text{m}$	0.02 mm
$\delta Y_p$	$5.1 \mu\text{m}$	0.02 mm
$\delta Z_p$	$4.9 \mu\text{m}$	0.01 mm
$\delta \alpha$	$2.9''$	$0.1^\circ$
$\delta \beta$	$2.9''$	$5''$
$\delta \gamma$	$3.7''$	$5''$

$\Delta l_i = \pm 5 \mu\text{m}$ ,共计  $2^6$  种取法,对每种取法直接代入程序进行正向求解,可知各位置和姿态参量的最大误差如表 2 所示;而正解误差极小,可忽略。因此,采用差动螺旋的微动调节方式可以达到表 1 中实际工程的分辨率要求,完全满足单色器箱体姿态的技术要求。

## 4 结 论

六杆并联机构运动学正解的实质是求解一系列六元非线性超越方程组。信赖域法是非线性优化中一类非常重要的数值计算方法,具有良好的收敛性和稳定性。本文以六杆并联机构的运动学反解为基础,采用非线性规划中的信赖域法,编制相应的程序,得到机构的运动学正解。从计算过程中看出,每次正解的迭代次数仅为 3~5 次,计算时间都在 1 s 以内,计算速度非常快。给定的动平台中心运动轨迹,调用程序即可自动得到对应的运动学正解轨迹。仿真结果表明,给定轨迹和正解轨迹基本重合,线性精度达  $10^{-12}$  mm,转动精度达  $10^{-15}^\circ$ 。同时,以上述理论为指导,采用差动螺旋的微动调节方式,就能使单色器箱体姿态的线性调节分辨达  $5 \mu\text{m}$ ,转角分辨达  $3''$ ,完全满足实际工作的要求。

## 参考文献:

- [1] 杜兆才,余跃庆,苏丽颖. 动平台惯性参数对柔性并联机构动力学特性的影响及优化设计[J]. 光学精密工程, 2006, 14(6): 1009-1016.
- [2] DU ZH C, YU Y Q, SU L Y. Effects of inertia parameters of moving platform on the dynamic characteristic of flexible parallel mechanism and optimal design[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2006, 14(6): 1009-1016. (in Chinese)
- [2] DASGUPTA B, MRUTHYUNJAYA T S. The Stewart platform manipulator: a review[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2000, 35(1): 15-40.

- [3] 陈修龙, 赵永生, 鹿玲. 新型并联机器人坐标测量机仿真建模的实现[J]. 光学精密工程, 2006, 14(6): 1025-1031.  
CHEN X L, ZHAO Y SH, LU L. Research on novel parallel robot coordinate measuring machine simulation modeling[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2006, 14(6): 1025-1031. (in Chinese)
- [4] 文福安, 梁崇高, 廖启征. 并联机器人机构位置正解[J]. 中国机械工程, 1999, 10(9): 1011-1013.  
WEN F A, LIANG CH G, LIAO Q ZH. The forward displacement analysis of parallel robotic mechanisms[J]. *China Mechanical Engineering*, 1999, 10(9): 1011-1013. (in Chinese)
- [5] 卢启鹏, 唐玉国, 薛松, 等. 紫外-真空紫外光谱辐射计量线站[J]. 核技术, 2003, 26(9): 649-653.  
LU Q P, TANG Y G, XUE S, *et al.*. Beamline and station of radiometry in the UV-VUV spectral regions[J]. *Nuclear Techniques*, 2003, 26(9): 649-653. (in Chinese)
- [6] KOCH E E, EASTMAN D E, FARGE Y. *Handbook of Synchrotron Radiation*[M]. New York: North-Holland Publishing Company, 1983:1-58.
- [7] 卢启鹏. 同步辐射软 X 射线束线单色器[J]. 光机电信息, 2001(9):35-39.  
LU Q P. Synchrotron radiation soft X-ray beam-line monochromator[J]. *OME Information*, 2001(9):35-39. (in Chinese)
- [8] 朱丽娟. 同步辐射光束线聚焦镜压弯机构研究[D]. 长春:中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 2006.  
ZHU L J. *Study of the Bending Mechanism of Focusing Mirror of Synchrotron Radiation Beamline*[D]. Changchun: Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, 2006. (in Chinese)
- [9] 文福安, 杨光. 并联机器人机构概述[J]. 机械科学与技术, 2000, 9(1): 69-72.  
WEN F A, YANG G. Introduction to parallel actuated manipulators[J]. *Mechanical Science and Technology*, 2000, 9(1): 69-72. (in Chinese)
- [10] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.  
HUANG ZH, ZHAO Y SH, ZHAO T SH. *Advanced Spatial Mechanism* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese)
- [11] STEWART D. A platform with six degrees of freedom[J]. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 1965, 180(15): 371-378.
- [12] 刘得军, 刘彩平, 韦荣方. 基于粒子群算法的 6-DOF 并联坐标测量机的测量建[J]. 光学精密工程, 2008, 16(1): 76-81.  
LIU D J, LIU C P, WEI R F. Measurement modeling for 6-DOF parallel-link coordinate measuring machine based on particle swarm optimization[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2008, 16(1): 76-81. (in Chinese)
- [13] 吴红梅. 非线性约束优化问题的信赖域算法[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2007.  
WU H M. *Trust Region Algorithms for Nonlinear Constrained Optimization Problems*[D]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2007. (in Chinese)
- [14] 王家文, 王皓, 刘海. MATLAB 7.0 编程基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.  
WANG J W, WANG H, LIU H. *Foundation of MATLAB 7.0 Programming*[M]. Beijing: China Machine Press, 2005. (in Chinese)

作者简介: 卢启鹏(1964—), 男, 黑龙江人, 研究员, 博士生导师, 主要从事同步辐射光束线关键技术的研究。E-mail: luqp@ciomp.ac.cn

李勇军(1983—), 男, 湖南人, 硕士研究生。E-mail: littoywolf@163.com